Exercices Série 15

Soit une application linéaire définie par $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}$$

1) Exprimez l'application linéaire ci-dessous sous forme de produit matrice-vecteur dans la base canonique.
2) Prouvez que pour toute matrice A, on a $(A^T)^T = A$.

Réponses

1) $A = (f(\vec{e}_1) \quad f(\vec{e}_2) \quad f(\vec{e}_3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

2) Par définition de la transposée, nous avons que pour une matrice $A_{m\times n}$
 $(a)^T{}_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, m$.
 Appliquons la définition de la transposée à $(A_{m\times n})^T$ qui est une matrice de taille $n \times m$.
 Donc :
 $(a^T)^T{}_{ij} = (a)^T{}_{ji} = a_{ij}$ pour tout $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, n$

 Les deux égalités ne sont rient d'autre que l'application de la définition de la transposée.
 La conséquence est que
 $(a^T)^T{}_{ij} = a_{ij}$ pour tout $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, n$, donc que chaque élément de la transposée de la transposée $(A^T)^T$ est égal à l'élément de la matrice A originale.
 Donc, chaque élément des deux matrices étant égaux deux-à-deux, les deux matrices sont égales. Ainsi, $(A^T)^T = A$.

CQFD.